Topologia
Lista 5

Zad 1. Pokazać, że przestrzeń dyskretna (X, τ) jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór X jest skończony.

Zad 2. Rozważmy odcinek $X = [0,1]$ z topologią $\tau = \{\emptyset, X, (0,1), \{1\}, (0,1]\}$. Czy jest to przestrzeń zwarta?

Zad 3. Czy przestrzeń $\mathbb{R}^2$ z *metryką kolejową* (zwaną też *metryką studnia*)

$$d(p,q) = \begin{cases} d_e(p,q), & \text{gdy } p \text{ i } q \text{ leżą na tej samej prostej} \\ & \text{przechodzącej przez punkt } (0,0), \\ d_e(p,(0,0)) + d_e(q,(0,0)), & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

gdzie d_e jest metryką euklidesową, jest zwarta?

Zad 4. Czy przestrzeń $X = [0,1]$ z topologią indukowaną z $\mathbb{R}_l$ jest zwarta?

Zad 5. Czy następujące podprzestrzenie płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \left(1 - \frac{1}{e^t}\right)\cos t, y = \left(1 - \frac{1}{e^t}\right)\sin t,\ t \in [0,\infty),\ \text{lub } x^2+y^2=1\},$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \left(1 + e^t\right)\cos t, y = \left(1 + e^t\right)\sin t,\ t \in [0,\infty),\ \text{lub } x^2+y^2=1\}$$

są homeomorficzne?

Zad 6. Dowieść, że w przestrzeni euklidesowej kula otwarta nie jest homeomorficzna z kulą domkniętą.

Zad 7. Twierdzenie Cantora mówi, że jeżeli $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset ...$ jest zstępującą rodziną domkniętych podzbiorów zwartej przestrzeni X, to

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset.$$

Pokazać na przykładzie, że założenia o zwartości przestrzeni X w tezie tego twierdzenia nie można opuścić.

Zad 8. Niech S^1 będzie okręgiem, zaś Y torusem bez jednego punktu. Czy te przestrzenie są homeomorficzne? Czy istnieją ciągłe przekształcenia jednej przestrzeni na drugą?

Zad 9. Pokazać, że nie istnieją dwie różne, porównywalne topologie zadające na ustalonym zbiorze strukturę przestrzeni zwartej.

Zad 10. Niech $A \subset X$, $B \subset Y$ będą zwartymi podprzestrzeniami przestrzeni topologicznych X, Y. Udowodnić, że jeśli istnieje otwarty podzbiór $W \subset X \times Y$ zawierający $A \times B$, to istnieją zbiory otwarte $U \subset X$, $V \subset Y$ takie, że $A \times B \subset U \times V \subset X \times Y$.

Zad 11. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a Y przestrzenią zwartą. Wykazać, że rzut $p : X \times Y \to X$:

$$p(x,y) = x, \qquad x \in X,\ y \in Y,$$

jest odwzorowaniem domkniętym, tj. przekształca zbiory domknięte na zbiory domknięte.

Zad 12. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a Y przestrzenią zwartą. Wykazać, że odwzorowanie $f : X \times Y$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy jego wykres

$$W = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\},$$

jest zbiorem domkniętym w $X \times Y$.